Le PageRank : ordonner le web en tant que tel

Présentation, calcul et propriétés

Guillaume Seguin

26/01/2009

Plan

Problématique

- Indexer des milliards de pages en constante évolution
- Introduire des critères plus forts que le contenu pour le classement des pages indexées, prenant en compte la structures topologique de l'internet
- Résister aux techniques de *web spamming*

Le PageRank

- Développé par Larry Page à l'Université de Stanford, puis avec Sergey Brin, publié (dans sa version originale) en 1998
- Utilisé comme un des facteurs intervenant dans le classement des résultats pour les recherches Google
- Se base sur des travaux d'Eugene Garfield sur l'analyse de l'importance des articles scientifiques comme fonction du nombre de citations de ces articles dans d'autres articles
- Introduit une notion d'autorité de chaque page web, basée sur les liens entrant et sortant de cette page web, et pas sur son contenu

Google™

Calcul

Définition : Formule de calcul du PageRank

Soit x_p le PageRank de la page p, h_p le nombre de liens sortant de cette page, I_p l'ensemble des pages pointant vers p et d un facteur d'atténuation, on a :

$$x_p = d \sum_{q \in I_p} \frac{x_q}{h_q} + (1 - d)$$

Version vectorielle

On peut étendre cette notion sous forme vectorielle :

Définition vectorielle du PageRank

Soit $\overrightarrow{x}$ le vecteur dont les composantes sont les x_p, $W = (w_{i,j})$ la matrice de transition avec $w_{i,j} = 1/h_j$ si il existe un lien de la page j à la page i et $w_{i,j} = 0$ sinon et $\overrightarrow{\mathbb{1}}$ le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Alors :

$$\overrightarrow{x} = dW\overrightarrow{x} + (1-d)\overrightarrow{\mathbb{1}}$$

Algorithme simple de calcul du PageRank

Le PageRank peut être calculé par l'algorithme itératif simple suivant, qui n'est autre que la méthode de Jacobi de résolution des systèmes linéaires :

$$\overrightarrow{x}(t) = dW\overrightarrow{x(t-1)} + (1-d)\overrightarrow{\mathbb{1}}$$

Pour $0 \leq d < 1$, ce système converge vers le vecteur $\overrightarrow{x}$ défini précédemment.
Nous verrons plus loin la complexité en temps de cet algorithme.

Élimination des *dandling pages*

→ W est presque une matrice stochastique (matrice dont la somme de chaque colonne vaut 1)

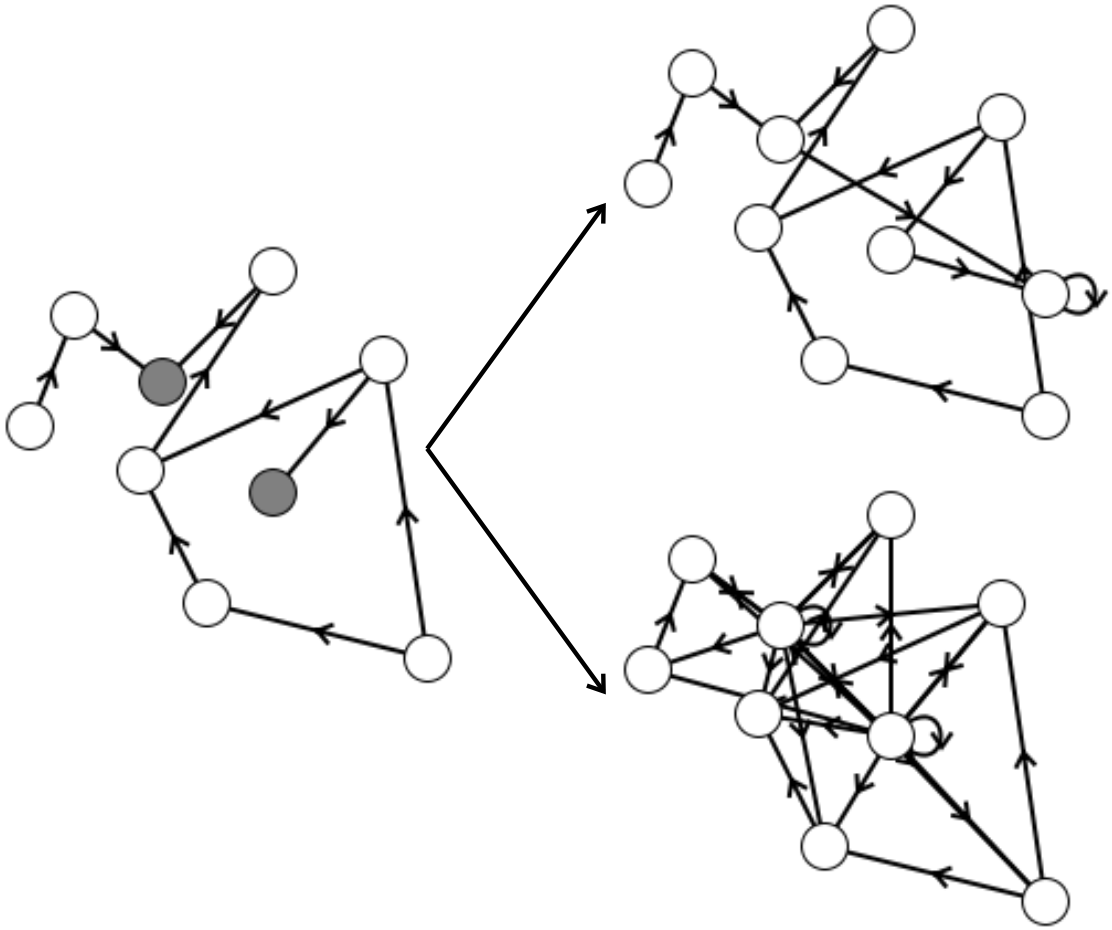
→ Posent problème les colonnes liées aux pages n'ayant pas de liens vers l'extérieur : les dandling pages

→ Deux solutions :

- Ajouter une page pointant vers elle même et vers laquelle pointent toutes les pages sans liens
- Faire pointer les pages sans liens sur toutes les pages

Ces deux solutions impliquent donc de modifier W en $\widetilde{W}$, puis de ramener le vecteur $\widetilde{\vec{x}}$ calculé au vecteur $\vec{x}$

Élimination des *dandling pages* (bis)



Importance du facteur d'amortissement

- $d = 0 \rightarrow$ toutes les pages ont un PageRank de 1
- $d = 1 \rightarrow$ le calcul peut ne pas converger, et de nombreuses pages se retrouvent avec un PageRank de 0
- Pour $d \rightarrow 1$, le PageRank des pages inessentielles tend vers 0 ; ces pages sont celles dont il est possible de partir sans pouvoir y revenir

Communauté

Définition : Communauté

Une communauté est un ensemble de pages I reliées par un quelconque lien (un site web, un ensemble de pages web de chercheurs travaillant sur un même sujet...)

On définit également :

- $out(I)$ est l'ensemble des pages extérieures à I pointées par des pages de I
- $in(I)$ est l'ensemble des pages extérieures à I pointant vers des pages de I
- $dp(I)$ est l'ensemble des pages de la communauté sans liens

Énergie

Définition : Énergie

L'énergie de la communauté I, notée E_I, est égale à la somme des PageRanks des pages de la communauté.

$$E_I = \sum_{p \in I} x_p$$

Similairement, on définit les énergies correspondant aux ensembles $out(I)$, $in(I)$ et $dp(I)$:

- E_I^{out} l'énergie allant de I vers l'extérieur de I
- E_I^{in} l'énergie allant de l'extérieur de I vers I
- E_I^{dp} l'énergie perdue depuis I dans les *dandling pages*

Balance d'énergie

Définition : Balance d'énergie

Ces énergies sont quantifiées par ces trois expressions qualifiées d'équations de balance d'énergie, avec $f_p(I)$ le ratio du nombre de pages pointées par p qui sont dans I sur le nombre total de pages pointées par p :

$$E_I^{in} = \frac{d}{1-d} \sum_{p \in in(I)} f_p(I) x_p$$

$$E_I^{out} = \frac{d}{1-d} \sum_{p \in out(I)} (1 - f_p(I)) x_p$$

$$E_I^{dp} = \frac{d}{1-d} \sum_{p \in dp(I)} x_p$$

Ces énergies sont reliées par la relation suivante, avec $|I|$ le nombre de pages de I :

Théorème

$$E_I = |I| + E_I^{in} - E_I^{out} - E_I^{dp}$$

Interactions entre communautés

Cette relation nous permet de tirer quelques conclusions sur comment optimiser les pages d'une communauté pour augmenter les scores de ses pages :

- Vu que $|I|$ est la composante de base de E_I, il vaut mieux répartir le contenu sur plusieurs petites pages que de tout rassembler
- On a $E_I \leq |I| + E_I^{in}$: les petites communautés vers lesquelles il y a peu de liens ne pourront pas avoir de hauts PageRanks

Interactions entre communautés (bis)

- Les pages sans liens sont à l'origine d'une perte d'énergie, perte d'autant plus faible que les pages pointant vers celles sans liens pointent vers beaucoup de pages
- Les liens vers l'extérieur sont à l'origine d'une perte d'énergie, d'autant plus grande si le PageRank est élevé, mais atténuée si la page pointe vers beaucoup de Pages de la communauté

Problème du *spamming*

Le spamming consiste à faire pointer beaucoup de pages vers une même page afin de faire monter son PageRank.
Le PageRank se comporte de manière plutôt robuste face au *spamming* : les petites communautés à faible énergie ne peuve pas modifier significativement le PageRank.
Toutefois, il reste vulnérable aux opérations vraiment massives, qualifiées de *Google Bombing*

Calcul sur un graphe évoluant dans le temps

Théorème

Le PageRank peut être calculé en utilisant une matrice de transition $W = W(t)$ évoluant dans le temps, par exemple mise à jour au fur et à mesure de l'exploration du web par les robots indexeurs.

Complexité temporelle

Théorème

Le PageRank peut être calculé par un algorithme en temps

$$O(|H| \cdot \log(1/\epsilon))$$

Pivot de Gauss vs. algorithme de Jacobi

On note N le nombre de pages web considérées. Pour l'ordre de grandeur, en 2004, on avait $N \simeq 10^{10}$, avec une croissance exponentielle

- La méthode du pivot de Gauss nécessite $\mathcal{O}(N^3)$ opérations pour résoudre le système portant sur $\overrightarrow{x}$
- L'algorithme de Jacobi s'exécute en $\mathcal{O}(m \cdot |H|)$ avec $|H|$ le nombre de liens et m le nombre d'itérations
- $|H| << N^2$ (par nature du web)
- $m << N$ (expérimentalement)
- Soit $m \cdot |H| << N^3$: Jacobi l'emporte !

Choix pratique de l'algorithme

- D'autres algos de résolution sont en théorie plus performants (méthode de Gauss-Seidel)
- Mais problème d'implémentation : W énorme !
- Avantage de Jacobi sur les autres méthodes : peut travailler avec les données directement fournies par les robots d'indexation (pour une page donnée, la liste des liens issus de cette page)
- $\longrightarrow$ Jacobi souvent choisi en pratique

Questions ?